Capítulo 6

Continuidad de funciones reales y vectoriales de variable vectorial

6.1. Introducción

Hasta el momento hemos estudiado funciones reales de variable real, es decir, funciones de la forma $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde Ω era un dominio abierto. Algunas definiciones eran:

- Límite de una función $f(x)$ en un punto $x_0 \in \Omega$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \Omega \text{ y tal que si } |x - x_0| < \delta$$
$$\text{entonces } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

- Continuidad de una función $f(x)$ en un punto $x_0 \in \Omega$.
  $f(x)$ es continua en $x_0 \in \Omega \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observamos que en ambas definiciones interviene la noción de intervalo abierto centrado en un punto, así como el valor absoluto de la diferencia de dos números reales que no es sino la distancia entre ellos. Asimismo, el concepto de límite es común a la continuidad, derivabilidad e integración. Nuestro objetivo será extrapolar estos conceptos al caso de una función $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde $n, m \in \mathbb{N}$.

6.2. Topología en $\mathbb{R}^n$

En este apartado generalizamos al espacio $\mathbb{R}^n$ los conceptos topológicos de valor absoluto, intervalo, conjunto abierto, cerrado, punto interior, punto adherente, etcétera. La introducción de una topología en $\mathbb{R}^n$ es necesaria a la hora de definir las nociones de límite y continuidad de funciones dependientes de varias variables reales.

El concepto de norma es la generalización del concepto valor absoluto. Así, sabemos que la distancia entre dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$ viene dada por $d(x, y) = |y - x|$. Veamos qué sucede en general.

Definición 1 (Norma, espacio vectorial normado) *Una* norma *sobre* $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \| : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \vec{x} & \to & \|\vec{x}\|, \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades para cada par de vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$*:*

(a) $\|\vec{x}\| \geq 0$ *y* $\|\vec{x}\| = \vec{0}$ *si, y sólo si,* $\vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ *(*desigualdad triangular*).*

(c) Para todo número real λ *se tiene que* $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.

El par $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *recibe el nombre de* espacio vectorial normado.

Ejemplo 1 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$ *son espacios vectoriales normados para las definiciones siguientes:*
$|\ |$ *es el valor absoluto de números reales. Si* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$,
$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ *y*
$\|\vec{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

Hemos obtenido de esta forma distintas formas de medir en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, ¿dependen los resultados de la norma escogida? La respuesta es que no. De hecho en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, es decir, dadas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en $\mathbb{R}^n$, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|\cdot\|_1 \leq \alpha\|\cdot\|_2 \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_2 \leq \beta\|\cdot\|_1.$$

La definición de límite será independiente de la norma elegida. Por ello, a partir de ahora utilizaremos la *norma euclídea*, $\|\cdot\|_2$. También es de señalar que la distancia euclídea entre dos vectores $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ viene dada de la forma:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots (y_n - x_n)^2} = \|\vec{y} - \vec{x}\|_2.$$

6.2.1. Nociones topológicas asociadas a un espacio normado

El concepto análogo al de intervalo en el caso multidimensional es el de *bola*, éste permitirá desarrollar la topología de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2 (Bola, disco) *Fijada una norma* $\|\cdot\|$ *de* $\mathbb{R}^n$, *dado un punto* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *y un número real* $\epsilon > 0$, *se define la* bola abierta o disco abierto de centro $\vec{x}$ y radio ϵ *(resp.* bola cerrada o disco cerrado de centro $\vec{x}$ y radio ϵ*) como el conjunto*

$$B(\vec{x}, \epsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}\| < \epsilon\} \quad (\textit{resp. } \overline{B}(\vec{x}, \epsilon) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \epsilon\}).$$

Veremos ahora el aspecto gráfico que tienen estos conjuntos para las normas definidas en el apartado anterior para $n = 1$ y 2. Será fácil ver que estos conceptos no son más que el concepto de intervalo cuando la norma elegida es el valor absoluto sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2 *Para* $n = 1$.

$$B(0; 1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} = (-1, 1).$$

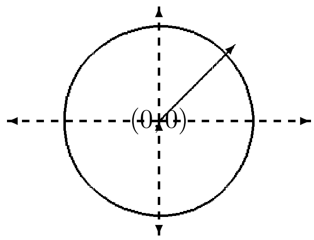
$$\overline{B}(0; 1) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} = [-1, 1].$$

Ejemplo 3 *Para* $n = 2$.

- $\|\cdot\|_2$.

$$B(0; 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\|_2 < 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{x}, \vec{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}.$$

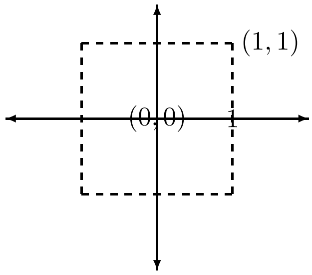
$$\overline{B}(0; 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\|_2 \leq 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{x}, \vec{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\}.$$



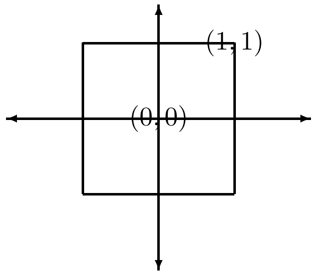
Bola cerrada $\|\cdot\|_2$

- $\|\cdot\|_\infty$.

$$B(0;1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\|_\infty < 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}.$$
$$\overline{B}(0;1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\|_1 \leq 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\}.$$



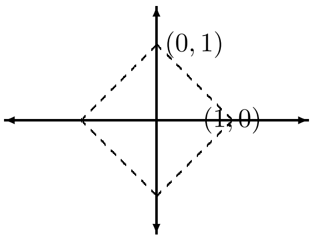
Bola abierta en $\|\cdot\|_\infty$



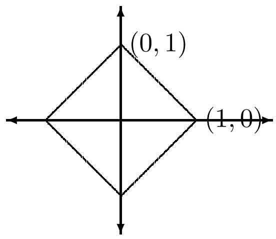
Bola cerrada en $\|\cdot\|_\infty$

- $\|\cdot\|_1$.

$$B(0;1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\|_1 < 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ |x_1| + |x_2\| < 1\}.$$
$$\overline{B}(0;1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\|_\infty \leq 1\} = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ |x_1| + |x_2| \leq 1\}.$$



Bola abierta en $\|\cdot\|_1$



Bola cerrada en $\|\cdot\|_1$

A continuación damos unas nociones más de topología que serán de utilidad para definir la *continuidad y diferenciabilidad* de funciones dependientes de varias variables reales.

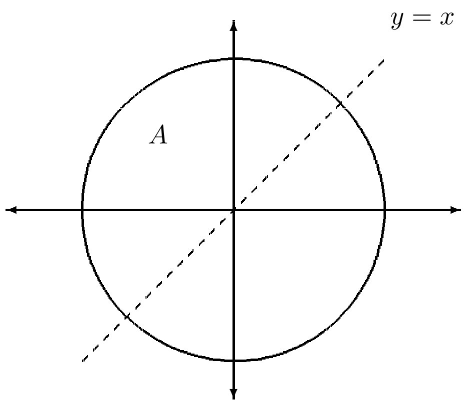
Definición 3 (Conjunto abierto y cerrado) *Un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *se dice* abierto *si y sólo si o* $A = \emptyset$ *o bien para todo punto* $\vec{x} \in A$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B(\vec{x}, \epsilon) \subset A$.

Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ *se dice* cerrado *si, y sólo si,* $\mathbb{R}^n \setminus F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin F\}$ *es abierto.*

Ejemplo 4 *$A = B(\vec{0}; 1)$, es un conjunto abierto.*

Ejemplo 5 *$A = \overline{B}(\vec{0}; 1)$, siendo $n = 2$ no es abierto, sino cerrado. El punto $(1, 0)$ no verifica la condición para que A sea abierto, puesto que cualquier bola centrado en él no está enteramente contenida en el conjunto.*

Ejemplo 6 *$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x < y\}$ no es ni abierto ni cerrado.*



Definición 4 (Interior, clausura y frontera de un conjunto) *Dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se define el interior de D, y se denota por $Int(D)$, como el mayor conjunto abierto contenido en D. La* clausura *de D, denotada por $Cl(D)$, es el menor conjunto cerrado que contiene a D. La* frontera *de D se denota por $Fr(D)$ y se define como $Fr(D) = Cl(D) \setminus Int(D)$.*

Los conjuntos abiertos y cerrados satisfacen las propiedades que recogemos en la siguiente proposición.

Proposición 1

1. *$\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos y cerrados a la vez.*
2. *La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
3. *La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
4. *La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*
5. *La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*
6. *Un conjunto es abierto si y sólo si coincide con su interior.*
7. *Un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su clausura.*

Ejemplo 7 *Sea $A = \overline{B}((0, 0); 1)$, entonces $Int(A) = B((0, 0); 1)$, $Cl(A) = A$, $Fr(A) = \{(x, y) : x^2+y^2 = 1\}$.*

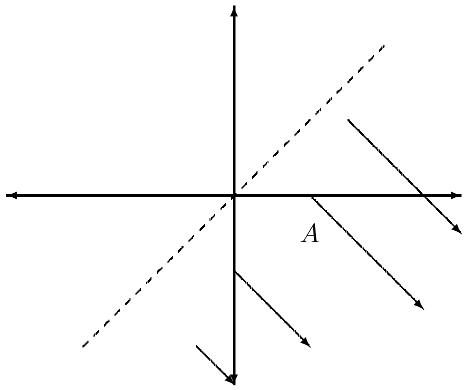
Ejemplo 8 *Considerando el ejemplo 6 calculamos el interior, la clausura y la frontera del conjunto.*
$Int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\, x < y\}$;
$Cl(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$;
$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\, x \leq y\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$

La definición que sigue de conjunto compacto no es la clásica de recubrimientos y subrecubrimientos, aunque para nuestros propósitos la consideramos suficiente.

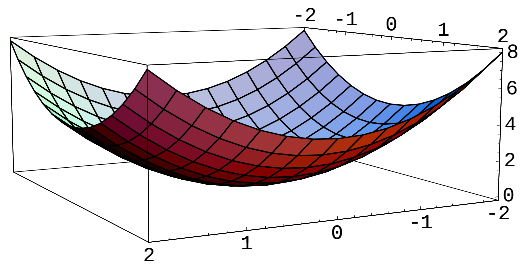
Definición 5 (Conjunto acotado y compacto) *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice* acotado *si y sólo si existe un número real positivo k tal que $\|\vec{x}\| \leq k$ para todo $\vec{x} \in A$. El conjunto A se dirá* compacto *si y sólo si además de ser acotado es cerrado.*

Ejemplo 9 *El conjunto A del ejemplo* **??** *es acotado.*

Ejemplo 10 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ *no es acotado.*



Ejemplo 11 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ *no es acotado.*



Definición 6 (Puntos de acumulación, interiores y aislados) *Dado un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y un punto* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*, se dice que* $\vec{x}$ *es un* punto de acumulación *de* A *si para todo número* $\epsilon > 0$ *se tiene que* $B(\vec{x}, \epsilon) \cap A \setminus \{\vec{x}\} \neq \emptyset$*. El conjunto de los puntos de acumulación se denota por* A'*.*

Se dice que el punto $\vec{x}$ *es* interior *a* A *si y sólo si pertenece a* $Int(A)$*. Por último se dirá que* $\vec{x}$ *es un punto* aislado *de* A *si, y sólo si, es un punto de* $Cl(A)$ *que no es de acumulación.*

Ejemplo 12 $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$*. El punto* $0 \notin A$*, sin embargo,* $0 \in A'$*.*

Finalizamos el apartado referido a topología con un ejemplo resumen.

Ejemplo 13 $A = \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}\} \cup \{(0, 5)\}$

$Int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \setminus \{(0, 0)\}$

$Cl(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(0, 5)\}$

$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0), (0, 5)\}$

No es abierto. Puesto que el punto $(0, 5) \notin Int(A)$*.*

No es cerrado. Puesto que $A \neq Cl(A)$*.*

$A' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$*.*

$(0, 5)$ *es un punto aislado.*

6.3. Concepto de función de varias variables

Por una función de varias variables entenderemos una función cuyo dominio de definición D es un conjunto de $\mathbb{R}^n$ y su rango está contenido en $\mathbb{R}^m$. La denotaremos como

$$\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Si el rango de dicha función es un subconjunto de $\mathbb{R}$, diremos que es una función real de varias variables y la denotaremos por

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Un ejemplo de función de varias variables es $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{f}(x, y, z) = (\cos(xy), x + y + \cos(z)).$$

Dada una expresión de la forma $f(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, entenderemos que ésta es una función de varias variables cuyo dominio de definición es el mayor posible, es decir, todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde la expresión tiene sentido. En este caso la función cuyo dominio de definición será

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

Dada una función $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se definen sus funciones coordenadas como las m funciones reales de varias variables $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que para todo elemento $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})).$$

Por ejemplo, la función $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\vec{f}(x, y, z) = (\cos(x + y), x - z, y^2 + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

tiene como funciones coordenadas: $f_1(x, y, z) = \cos(x + y)$, $f_2(x, y, z) = x - z$, $f_3(x, y, z) = y^2 + z$, $f_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

6.4. Límite de una función de varias variables

Consideremos una función $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y denotamos por $\|\cdot\|_n$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y por norma $\|\cdot\|_m$ una norma en $\mathbb{R}^m$. Consideremos un punto de acumulación $\vec{x}_0$ de D y sea $\vec{l} \in \mathbb{R}^m$.

Definición 7 *Diremos que el límite cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$ de la función $\vec{f}$ es $\vec{l}$, y lo denotaremos por $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{l}$, si para todo número real $\epsilon > 0$, existe otro número $\delta > 0$ (que depende de $\vec{x}_0$ y de ϵ) de manera que para todo $\vec{x} \in D$ verificando que $\|\vec{x}_0 - \vec{x}\|_n < \delta$ se cumple que*

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{l}\right\|_m < \epsilon.$$

La definición coincide por completo con la de límite de funciones reales de variable real.

Proposición 2 *El límite en caso de existir es único.*

Proposición 3 *Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_m) \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i \quad i = 1, \ldots, m$$

Proposición 4 *Sean $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dos funciones de varias variables y $\vec{x}_0$ un punto de acumulación de D. Sean $l_1 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$ y $l_2 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \alpha\vec{f}(\vec{x}) + \beta\vec{g}(\vec{x}) = \alpha\vec{l_1} + \beta\vec{l_2}$ *para cada* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. *Si* $m = 1$, *entonces* $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})\vec{g}(\vec{x}) = l_1 \cdot l_2$.
3. *Si* $m = 1$ *y* $l_2 \neq 0$, *entonces* $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x})}{\vec{g}(\vec{x})} = \frac{l_1}{l_2}$.

6.5. Cálculo de límites

Podemos proceder de dos formas: usando la definición o intentando reducir el problema al cálculo de límites de funciones reales de variable real.

6.5.1. Límites iterados

Son dos límites obtenidos de la forma siguiente: Hacemos primero el límite de la función cuando x tiende a x_0 y obtenemos una función que depende de y. A continuación calculamos el límite de dicha función cuando y tiende a y_0. Realizando el mismo proceso alternando las variables obtenemos el segundo límite iterado

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right) = l_{12}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right) = l_{21}.$$

Si existe el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, entonces los límites iterados son iguales y coinciden con éste. Así en caso de no ser iguales podremos afirmar que no existe el límite.

De la igualdad de límites iterados no se puede deducir la existencia del límite, no obstante obtendremos un candidato para el mismo.

6.5.2. Límites direccionales

Consideremos una función $y = g(x)$ de manera que $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. Se define el límite direccional a lo largo de g como

$$\lim_{x \to x_0} f(x, g(x)) = l_g$$

En caso de que exista el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ se verifica que $l = l_g$ para toda función g satisfaciendo las condiciones anteriores. En caso de encontrar dos funciones de manera que los límites direccionales no coincidan tendríamos que el límite de la función en (x_0, y_0) no existiría.

En general suelen considerarse familias de funciones de la forma $y = mx$ o $y = mx^2$, con m un número real, para calcular límites direcciones.

6.5.3. Paso a coordenadas polares

La función $f(x,y)$ puede tener una expresión en coordenadas polares de la forma

$$f(r,\phi) = f(r\cos(\phi), r\text{cos}(\phi))$$

Proposición 5 *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(0,0)$ un punto de acumulación de D. Si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0} f(r,\phi) = l$ para cada $\phi \in [0,2\pi]$ y se tiene que $|f(r,\phi) - l| \leq F(r)$ para cada $\phi \in [0,2\pi]$, donde $F(r)$ es una función satisfaciendo $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$. Entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l.$$

Ejemplo 14 *Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.*

Haciendo el cambio a polares obtenemos

$$f(r\cos(\phi), r\text{cos}(\phi)) = \frac{r^3 \cos(\phi)\text{cos}^2(\phi)}{r^2} = r\cos(\phi)\text{cos}^2(\phi)$$

Luego

$$|f(r\cos(\phi), r\text{cos}(\phi))| \leq r$$

Tomando $F(r) = r$ observamos que se cumplen las hipótesis del teorema y así

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

6.5.4. Continuidad de funciones de varias variables

Definición 8 *Sean $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x}_0 \in D$. $\vec{f}$ es continua en el punto $\vec{x}_0$ si existe el límite*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$$

Si $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}$ para todo punto $\vec{x}_0$ de D la función $\vec{f}$ se dice continua en D.

Proposición 6 *Sea $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$\vec{f}$ es continua en un punto $\vec{x}_0 \in D$ si, y sólo si, cada f_i es continua en $\vec{x}_0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.*
2. *$\vec{f}$ es continua en D para $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Proposición 7 *Sean $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funciones de varias variables continuas en $\vec{x}_0$ (respectivamente en D). Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

1. *La función $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ es continua en $\vec{x}_0$ (respectivamente en D).*
2. *Si $m = 1$ y $g(\vec{x}_0) \neq 0$ (respectivamente $g(\vec{x}) \neq 0$) para $\vec{x} \in D$) entonces la función cociente $\frac{f}{g}$ es continua en $\vec{x}_0$ (respectivamente en D).*

Consideremos dos funciones $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{g} : D' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ de manera que la imagen de $\vec{f}$ está contenida en D'. Podemos definir la función compuesta $\vec{g} \circ \vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ dada por $\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ para todo $\vec{x} \in D$.

Proposición 8 *Si $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0 \in D$ y $\vec{g}$ es continua en $\vec{f}(\vec{x}_0)$ se verifica que $\vec{g} \circ \vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$. Si $\vec{f}$ es continua en D y $\vec{g}$ es continua en D', entonces $\vec{g} \circ \vec{f}$ es continua en D.*